

Полиномиальный Нодальный Метод Решения Диффузионных Уравнений в Гексагональной Геометрии

Д. М. Батулин и В. Г. Зимин

*Лаборатория тренажерных систем,
Московский Инженерно-Физический Институт,
Каширское шоссе 31, Москва, 115409
E-mail: dennis@ets.mephi.ru, slava@ets.mephi.ru*

Аннотация

Полиномиальный нодальный метод разработан для решения малогрупповых диффузионных уравнений в гексагональной геометрии. Метод основан на конформном отображении шестигранника на прямоугольник. Полученные уравнения решаются методом Галеркина с разложением поперечно-интегрированного нейтронного потока по ортогональным полиномам до четвертого порядка. Поперечная утечка представляется, используя постоянные значения тока нейтронов на внутренних гранях ячеек и линейную аппроксимацию на гранях ячеек на границе реактора. Нелинейная итерационная процедура используется для решения нодальных уравнений. Коэффициенты разложения нейтронного потока находятся, рассматривая задачу для двух ячеек для каждой грани. В результате ортогональности пробных функций, $8G$ исходных нодальных уравнений для каждой грани сводятся к двум системам из G и $2G$ уравнений, где G число энергетических групп.

Метод реализован в компьютерной программе SKETCH-N, разработанной для решения стационарных и нестационарных задач. Представленные результаты решения широкого круга стационарных тестовых задач демонстрируют высокую точность метода.

¹ Материалы 12-го семинара "Нейтроника-2001", Обнинск, 29 октября-2 ноября 2001 г.

I Введение

Тепловыделяющие сборки российских реакторов ВВЭР-440 и ВВЭР-1000, составляющих основу российской атомной энергетики, имеют поперечное сечение гексагональной формы. ТВС такой формы применяются также в жидкометаллических реакторах на быстрых нейтронах, тяжеловодных и газоохлаждаемых реакторах. Вместе с развитием реакторов развивались и методы расчета нейтронных полей в гексагональной геометрии. В работах Kulikowska (1981) и Gadó and Schmidt (1987) содержится обзор основных этапов и большой список ссылок на публикации по данному вопросу, начиная с середины 70-х годов.

К настоящему моменту, наибольшую популярность получили нодальные методы, в качестве неизвестных в которых рассматриваются средние по объему и поверхности потоки и токи нейтронов. В случае декартовой геометрии для этого часто применяется процедура поперечного интегрирования исходного диффузионного уравнения и последующее решение квазиодномерных уравнений. Данные методы характеризуются высокой точностью и быстродействием. В работах (Chao and Tsolfanidis, 1995; Chao and Shatilla, 1995) предложен и обоснован метод, позволяющий применить процедуру поперечного интегрирования для уравнения диффузии на гексагональной области. Метод основан на конформном отображении шестигранника на прямоугольник. Процедура поперечного интегрирования применяется в новых прямоугольных координатах аналогично нодальным методам в декартовой геометрии. Существенным отличием является тот факт, что в следствии конформного отображения прямоугольная расчетная область становится гетерогенной.

В программе ANC-H (Chao and Shatilla, 1995) для решения одномерного поперечно-проинтегрированного уравнения диффузии применяется полуаналитический нодальный метод. Представленные результаты расчетов тестовых задач демонстрируют высокую точность метода, несмотря на то, что применяемые для аппроксимации формы потока нейтронов гиперболические синус и косинус не являются решением уравнения. Аналогично, используя конформное отображение, был разработан аналитический нодальный метод, примененный в программе PANTHER (Knight et al., 1995). В данном методе аналитическое решение поперечно проинтегрированного уравнения диффузии аппроксимируется рядом рациональных функций. К недостаткам данного метода следует отнести сложность выбора порядка аппроксимации, который обеспечит желаемую точность для широкого круга задач.

В нодальном методе решения уравнения диффузии в гексагональной геометрии, описанию которого посвящена данная статья, также при-

меняется конформное отображение шестигранника на прямоугольник. Отличие от методов, описанных выше, заключается в методе решения одномерного поперечно-проинтегрированного уравнения и аппроксимации поперечной утечки нейтронов. Поперечная утечка, аналогично программе PANTHER, аппроксимируется кусочно-постоянной функцией для внутренних расчетных ячеек, однако для граничных ячеек используется кусочно-линейная аппроксимация. Использование такого вида аппроксимации существенно повышает точность метода в случаях, когда отражатель не моделируется явным образом. Для решения одномерного уравнения диффузии используется полиномиальный метод. Поперечно-проинтегрированный поток нейтронов аппроксимируется полиномами до четвертого порядка включительно ортогональными с весом квадрата коэффициента искажения конформного отображения. Аналогично полиномиальному методу для декартовой геометрии (Zimin et al., 1998) для решения уравнения диффузии во всем расчетном объеме применяется нелинейная итерационная процедура. Задача разбивается на два уровня: итерационный расчет нейтронного поля во всех ячейках аналогичный конечно-разностному методу и пересчет нодальных коэффициентов перетока нейтронов путем решения вспомогательных двухъячеечных задач. В каждой двухъячеечной задаче для расчета коэффициентов аппроксимации одномерного поперечно проинтегрированного потока нейтронов используется уравнения баланса нейтронов, уравнения 1-го и 2-го моментов и условия непрерывности потока и тока нейтронов на границе ячеек. Условие ортогональности полиномов приводит к разбиению системы из $8G$ уравнений на две системы из G и $2G$ уравнений, где G - число энергетических групп.

Статья организована следующим образом. В разделе II дается общее описание преобразования уравнения диффузии при конформном отображении шестигранника на прямоугольник. Аппроксимация поперечной утечки обсуждается в разделе III. Раздел IV посвящен описанию полиномиального нодального метода. Результаты решения серии тестовых задач демонстрирующих точность разработанного метода представлены в разделе V. Завершает статью раздел VI, содержащий выводы и заключение.

II Преобразование системы координат и исходного уравнения диффузии

Расчетная область задачи представлена набором гексагональных призм. Каждая элементарная ячейка может быть определена как:

$$\begin{aligned}
V_k(x, y, z) : \quad & x \in [-h/2, h/2] \\
& y \in [-y_s(x), y_s(x)], \quad y_s(x) = 1/\sqrt{3}(h - |x|) \\
& z \in [-\Delta z^k/2, \Delta z^k/2]
\end{aligned}$$

где

h — размер кассеты “под ключ”, а ось x выбрана перпендикулярно одной из пар противоположных граней шестигранника.

Уравнение переноса нейтронов в многогрупповом диффузионном приближении в матричной форме запишем следующим образом:

$$\begin{aligned}
- D_k \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \varphi^k(x, y, z) + \\
\left[\Sigma_r^k - \Sigma_s^k - \frac{1}{k_{eff}} \chi \left(\nu \Sigma_f^k \right)^T \right] \varphi^k(x, y, z) = 0 \quad (1)
\end{aligned}$$

где

$\varphi(z, y, z) = col \{ \varphi_1(z, y, z), \dots, \varphi_G(z, y, z) \}$ — поток нейтронов [$cm^{-2}s^{-1}$];

Σ_r — диагональная матрица сечений увода [cm^{-1}];

Σ_s — матрица сечений перевода нейтронов из группы в группу [cm^{-1}];

k_{eff} — эффективный коэффициент размножения;

$\chi = col \{ \chi_1, \dots, \chi_G \}$ — спектр нейтронов деления;

$\nu \Sigma_f = col \{ \nu \Sigma_{f1}, \dots, \nu \Sigma_{fG} \}$ — сечение деления [cm^{-1}];

D — диагональная матрица коэффициентов диффузии [cm];

T — знак операции транспонирования.

Интегрируя (1) в направлении z , получаем:

$$\begin{aligned}
- D_k \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \varphi_z^k(x, y) + \\
\left[\Sigma_r^k - \Sigma_s^k - \frac{1}{k_{eff}} \chi \left(\nu \Sigma_f^k \right)^T \right] \varphi_z^k(x, y) = -L_z^k(x, y), \quad (2)
\end{aligned}$$

где

$\varphi_z^k(x, y) = \frac{1}{\Delta z^k} \int_{-\Delta z^k/2}^{\Delta z^k/2} \varphi^k(x, y, z) dz$ — z -интегрированный нейтронный поток;

$L_z^k(x, y) = \frac{1}{\Delta z_k} \{ J_z^k(x, y, \Delta z_k/2) - J_z^k(x, y, -\Delta z_k/2) \}$ — утечка в z -направлении;

$J_z^k(x, y, \pm \Delta z_k/2)$ — z -составляющая тока нейтронов на верхней (нижней) гранях ячейки.

В дальнейшем для упрощения записи индекс z для потока нейтронов будем опускать.

Для решения (2) применим конформное отображение аналогично (Chao and Tsolfanidis, 1995; Chao and Shatilla, 1995). При этом отображении область шестигранника, определенного на комплексной плоскости $\mathbb{Z} = x + iy$, переводится в прямоугольник на комплексной плоскости $\mathbb{W} = u + iv$. Конформное отображение осуществляется последовательным применением преобразований Шварца-Кристоффеля: прямоугольник на полуплоскость, полуплоскость на круг и круг на шестигранник. Явный вид формул приведен в (Chao and Tsolfanidis, 1995).

На плоскости \mathbb{W} прямоугольник задается следующим образом:

$$V^k(u, v) : u \in [-a/2, a/2], v \in [0, b]$$

Отношение длин сторон a/b определяется конформным отображением. Значения a и b определяются из условия сохранения площади ячейки при конформном отображении и выражаются через размер “под ключ” h как

$$a/h \approx 1.052557 \quad \text{and} \quad b/h \approx 0.822872$$

Оператор Лапласа инвариантен по отношению к конформному отображению:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = \frac{1}{g^2(u, v)} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right)$$

где $g(u, v) = |\partial \mathbb{Z} / \partial \mathbb{W}|$ — линейный коэффициент искажения.

В дальнейшем, будем предполагать, что поперечная утечка в аксиальном направлении $L_z^k(x, y)$ не зависит от координат (x, y) и равна среднему значению

$$L_z^k(x, y) = \bar{L}_z^k = \frac{1}{\Delta z^k} \left\{ \bar{J}_z^k(\Delta z^k/2) - \bar{J}_z^k(-\Delta z^k/2) \right\},$$

где

$\bar{J}_z^k(\pm \Delta z^k/2)$ — средние по грани токи нейтронов в z - направлении на верхней и нижней гранях ячейки.

Интегрируя (2) в направлении v , получаем одномерное поперечно-интегрированное уравнение диффузии

$$-\frac{d\Phi^k(u)}{du^2} + (B^2)^k \bar{g}^2(u) \Phi^k(u) = -(D^k)^{-1} \left\{ L_v^k(u) + \bar{g}^2(u) \bar{L}_z^k \right\} \quad (3)$$

где

$\Phi^k(u) = \frac{1}{b} \int_0^b \varphi_z^k(u, v) dv$ — поперечно-интегрированный поток нейтронов;

$(B^2)^k = (D^k)^{-1} \left[\Sigma_r^k - \Sigma_s^k - \frac{1}{k_{eff}} \chi \left(\nu \Sigma_f^k \right)^T \right]$ — баклинг ячейки;

$$\overline{g^2}(u) \approx \frac{1}{b} \int_0^b g^2(u, v) dv;$$

$$L_v^k(u) = \frac{1}{b} \{J_v(u, b) - J_v(u, 0)\} \text{ — поперечная утечка в } v\text{-направлении.}$$

Введем безразмерную координату $\xi = 2u/a$ и перепишем уравнение (3) в виде:

$$-\frac{d^2 \Phi^k(\xi)}{d\xi^2} + (\widehat{B}^2)^k \overline{g^2}(\xi) \Phi^k(\xi) = -s_v^k(\xi) - s_z^k(\xi), \quad (4)$$

где $s_v^k(\xi) = (a^2/4) (D^k)^{-1} L_v^k(\xi)$; $s_z^k(\xi) = (a^2/4) (D^k)^{-1} \overline{g^2}(\xi) \bar{L}_z^k$;
 $(\widehat{B}^2)^k = \frac{a^2}{4} (B^2)^k$.

III Аппроксимация поперечной утечки

Нормальная составляющая тока нейтронов на границе прямоугольника на плоскости \mathbb{W} может быть выражена через нормальный ток нейтронов на границе шестигранника как

$$J_v(u, b) = g(u, b) J_T(x, y_s(x)) \text{ and } J_v(u, 0) = g(u, 0) J_B(x, -y_s(x))$$

где

$$J_T(x, y_s(x)), J_B(x, -y_s(x)) \text{ — нормальная составляющая тока нейтронов на верхней и нижней границе шестигранника;}$$

$$\text{and } g(u, b) = g(u, 0).$$

Поперечная утечка $L_v^k(u)$ может быть представлена в виде кусочной функции соответственно в правой и левой половинах:

$$L_v^k(u) = L_{vL}^k \mu(-u) + L_{vR}^k \mu(u)$$

где

$$L_{vL}^k(u), L_{vR}^k(u) \text{ — поперечная утечка в правой и левой половинах;}$$

$$\mu(u) = \begin{cases} 0 & \text{if } u < 0 \\ 1 & \text{if } u > 0 \end{cases} \text{ ступенчатая функция.}$$

Предполагая, что нормальная составляющая тока нейтронов постоянна на границе шестигранника, получаем

$$L_{vL}^k(u) = \frac{3h}{2b} g(u, 0) \bar{L}_{vL}^k; \quad L_{vR}^k(u) = \frac{3h}{2b} g(u, 0) \bar{L}_{vR}^k$$

где

$\bar{L}_{vL}^k = (2/3h)\{\bar{J}_{TL}^k - \bar{J}_{BL}^k\}$ — средняя поперечная утечка в левой половине шестигранника;

$\bar{L}_{vR}^k = (2/3h)\{\bar{J}_{TR}^k - \bar{J}_{BR}^k\}$ — средняя поперечная утечка в правой половине шестигранника.

Определение нормальных составляющих тока нейтронов проиллюстрировано на рис. 1. Аппроксимация среднего по грани тока нейтронов константой дает кусочно-постоянное представление формы поперечной утечки, что напоминает приближение плоской утечки в случае декартовой геометрии. Первые результаты решения тестовых задач продемонстрировали, что данный вид аппроксимации приводит к большим погрешностям в случае, когда отражатель явно не моделируется. В цели повышения точности расчетов была применена линейная аппроксимация поперечной утечки для граничной ячейки. Для примера рассмотрим ячейку с правой внешней границей. Представим форму тока нейтронов на правой верхней грани в виде

$$J_{TR}(x') = \bar{J}_{TR}^k + l_{TR}^k (x' - x'_0)$$

Расположение оси x' показано на рисунке 2. Ток нейтронов на плоскости \mathbb{W} записывается как

$$J_{TR}(u) = g(u, 0) \left(\bar{J}_{TR}^k + l_{TR}^k \left[\int_0^u g(u', 0) du' - x'_0 \right] \right)$$

Используя аналогичную аппроксимацию тока нейтронов на нижней правой грани шестигранника, поперечная утечка в правой половине ячейки записывается как

$$L_{vR}^k(u) = \frac{3h}{2b} g(u, 0) \left(\bar{L}_{vR}^k + l_R^k \left[\int_0^u g(u', 0) du' - x'_0 \right] \right)$$

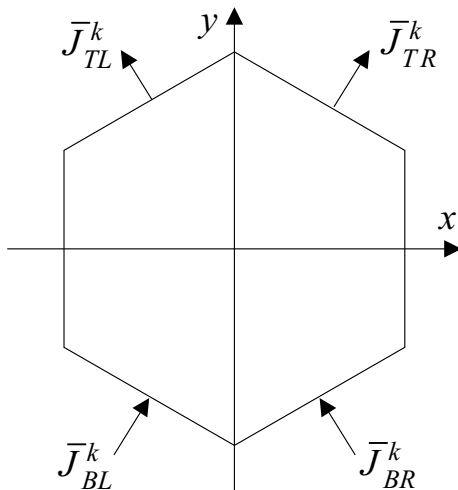


Рис. 1. Система координат и схема определения токов нейтронов в шестиграннике

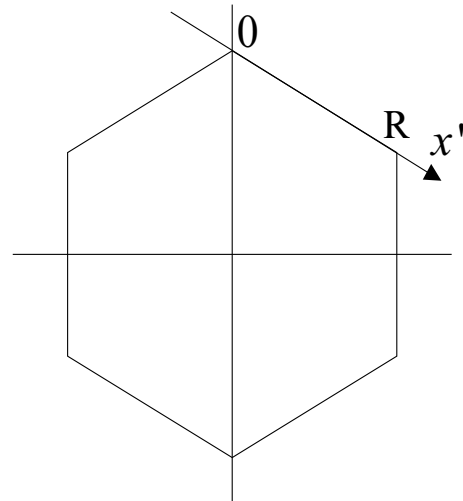


Рис. 2. Локальная система координат для линейной аппроксимации тока нейтронов j_{TR} на грани

где $l_R^k = l_{TR}^k - l_{BR}^k$.

Введя безразмерную координату $\xi = 2u/a$, получаем

$$L_{vR}^k(\xi) = \frac{3h}{2b} g(\xi, 0) \left(\bar{L}_{vR}^k + \hat{l}_R^k [f(\xi) - \xi_0] \right)$$

где $f(\xi) = \int_0^\xi g(\tau, 0) d\tau$; $\hat{l}_R^k = R l_R^k$; $\xi_0 = x'_0/R$.

Константа ξ_0 определяется из условия сохранения среднего значения поперечной утечки в правой половине ячейки

$$\xi_0 = \int_0^1 g(\xi, 0) f(\xi) d\xi / \int_0^1 g(\xi, 0) d\xi$$

Константа \hat{l}_R^k определяется из граничного условия.

IV Метод решения одномерного уравнения диффузии

Для решения уравнения (3) применена модификация полиномиального нодального метода, разработанного для решения уравнения диффузии в декартовой геометрии (Zimin et al., 1998). Полиномы выбираются из условия ортогональности с весом $\bar{g}^2(\xi)$ на интервале $[-1, 1]$ и условия равенства единице на правой границе

$$\int_{-1}^1 P_i(\xi) \bar{g}^2(\xi) P_j(\xi) d\xi = \begin{cases} 0 & \text{if } i \neq j \\ N_i & \text{if } i = j \end{cases} \quad \text{and } P_i(1) = 1$$

Явный вид полиномов получен с помощью процедуры ортогонализации Грам-Шмидта. Поперечно-интегрированный поток нейтронов аппроксимируется полиномиальным рядом четвертого порядка

$$\Phi^k(\xi) = \sum_{i=0}^4 a_{ui}^k P_i(\xi) = \bar{\Phi}^k + \sum_{i=1}^4 a_{ui}^k P_i(\xi), \quad (5)$$

где $a_{u0}^k = \int_{-1}^1 \Phi^k(\xi) \bar{g}^2(\xi) d\xi = \bar{\Phi}^k$.

Поперечная утечка аппроксимируется полиномами до второго порядка

$$s_{vz}^k = \sum_{i=0}^2 s_{vzi}^k P_i(\xi)$$

где $s_{vzi}^k = \frac{1}{N_i} \int_{-1}^1 \{s_v^k(\xi) + s_z^k(\xi)\} P_i(\xi) d\xi$;

Для расчета потока нейтронов во всем объеме реактора применяется нелинейная итерационная процедура (Smith, 1984). Следуя этой методике,

средний по грани ток нейтронов представляется в виде

$$J_{x+}^k = -\tilde{D}^k(fd) (\bar{\Phi}^{k+1} - \bar{\Phi}^k) - \tilde{D}^k(nod) (\bar{\Phi}^{k+1} + \bar{\Phi}^k)$$

где

$k + 1$ — номер соседней ячейки в x направлении;

$\tilde{D}^k(fd)$ — диагональная матрица коэффициентов связи из конечно-разностного метода;

$\tilde{D}^k(nod)$ — диагональная матрица неизвестных нодальных коэффициентов связи.

Подставив это выражение для тока нейтронов в уравнение баланса нейтронов, получаем крупно-сеточную конечно-разностную форму уравнений диффузии нейтронов. В начале нелинейной итерационной процедуры нодальные коэффициенты связи $\tilde{D}^k(nod)$ принимаются нулевыми. После нескольких итераций метода конечных разностей получаем некоторые значения средних потоков нейтронов и эффективного коэффициента размножения. Решая нодальным методом двухъячеечные задачи, получаем значения средних по граням токов нейтронов. Потребовав, чтобы метод конечных разностей воспроизводил эти значения токов нейтронов вычисляем нодальные коэффициенты связи как

$$(\tilde{D}^k(nod))_{gg} = \frac{-J_{gx+}^k - \tilde{D}_g^k(fd) (\bar{\Phi}_g^{k+1} - \bar{\Phi}_g^k)}{\bar{\Phi}_g^{k+1} + \bar{\Phi}_g^k}; \quad (6)$$

Нелинейная итерационная процедура продолжается до тех пор, пока изменяются нодальные коэффициенты связи.

В результате расчет распределения потока нейтронов во всем объеме реактора разделяется на два параллельных процесса: итерации метода конечных разностей и решения нодальных уравнений для расчета средних значений тока нейтронов на гранях ячеек и нодальных коэффициентов связи.

Исходя из формы аппроксимации нейтронного потока (5), средний по грани ток нейтронов выражается как

$$\bar{J}_{x+}^k = \frac{b}{R} \bar{J}_{u+}^k = -\frac{b}{R} \widehat{D}_k \left\{ \sum_{i=1}^4 c_i^J a_{ui}^k \right\}, \quad (7)$$

где

\bar{J}_{x+}^k — средний ток нейтронов на правой грани шестигранника;

\bar{J}_{u+}^k — средний ток нейтронов на правой грани прямоугольника;

$R = h/\sqrt{3}$ — длина стороны шестигранника;

$$\widehat{D}^k = \frac{2D^k}{a} - \text{безразмерный коэффициент диффузии};$$

$$c_i^J = \left. \frac{dP_i(\xi)}{d\xi} \right|_{\xi=1}, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Неизвестные коэффициенты разложения вычисляются в ходе решения двухъячеечной задачи. В этой задаче имеются четыре неизвестных коэффициента разложения в каждой ячейке в каждой энергетической группе. Следовательно необходимо восемь уравнений для их расчета. Это:

- уравнения нейтронного баланса для каждой ячейки k и $k + 1$ ($2G$ уравнений)
- два уравнения моментов в каждой ячейке ($4G$ уравнений)
- условие непрерывности потока нейтронов на границе между ячейками (G уравнений)
- условие непрерывности средних по грани токов нейтронов на границе между ячейками (G уравнений).

В случае граничной ячейки формулируется одноячеечная задача. В этом случае имеется $4G$ неизвестных. Условия непрерывности тока и потока нейтронов заменяются на граничное условие. Таким образом, для расчета $4G$ неизвестных имеется $4G$ уравнений.

Процедура решения практически идентична случаю декартовой геометрии (Zimin et al., 1998). Используя уравнения моментов, коэффициенты аппроксимации высших порядков выражаются через низшие:

$$a_{u3}^k = c_{31} \left\{ (\widehat{B}^2)^k a_{u1}^k + s_{vz1}^k \right\}, \quad (8)$$

и

$$a_{u4}^k = c_{42} \left\{ \left[(\widehat{B}^2)^k - c_{22} \right] a_{u2}^k + s_{vz2}^k \right\}, \quad (9)$$

где

$$c_{31} = \frac{N_1}{\int_{-1}^1 P_1(\xi) \frac{d^2 P_3(\xi)}{d\xi^2} d\xi}; \quad c_{42} = \frac{N_2}{\int_{-1}^1 P_2(\xi) \frac{d^2 P_4(\xi)}{d\xi^2} d\xi};$$

$$\text{и } c_{22} = \frac{1}{N_2} \int_{-1}^1 P_2(\xi) \frac{d^2 P_2(\xi)}{d\xi^2} d\xi$$

Подставляя четвертый коэффициент (9) в уравнение баланса нейтронов, получаем систему из G уравнений для расчета второго коэффициента разложения:

$$\left\{ c_2^J + c_2 \left[(\widehat{B}^2)^k - c_{22} \right] \right\} a_{u2}^k = (\widehat{B}^2)^k \bar{\Phi}^k + \left\{ s_{vz0}^k - c_2 s_{vz2}^k \right\}, \quad (10)$$

где $c_2 = c_{42} c_4^J$.

Подставляя третий коэффициент (8) в уравнение непрерывности тока и

потока нейтронов, получаем систему из $2G$ уравнений для расчета первого коэффициента разложения:

непрерывность потока:

$$\left\{ I + c_{31} (\widehat{B}^2)^{k+1} \right\} a_{u1}^{k+1} + \left\{ I + c_{31} (\widehat{B}^2)^k \right\} a_{u1}^k = \left\{ \bar{\Phi}^{k+1} + a_{u2}^{k+1} + a_{u4}^{k+1} \right\} - \left\{ \bar{\Phi}^k + a_{u2}^k + a_{u4}^k \right\} - c_{31} \left\{ s_{vz1}^k + s_{vz1}^{k+1} \right\} \quad (11)$$

непрерывность тока:

$$\widehat{D}^{k+1} \left\{ I + c_1 (\widehat{B}^2)^{k+1} \right\} a_{u1}^{k+1} - \widehat{D}^k \left\{ I + c_1 (\widehat{B}^2)^k \right\} a_{u1}^k = \widehat{D}^{k+1} \left\{ c_2^J a_{u2}^{k+1} + c_4^J a_{u4}^{k+1} - c_1 s_{vz1}^{k+1} \right\} + \widehat{D}^k \left\{ c_2^J a_{u2}^k + c_4^J a_{u4}^k - c_1 s_{vz1}^k \right\} \quad (12)$$

где $c_1 = c_{31} c_3^J$.

В результате, исходная система из $8G$ уравнений приводится к G уравнениям (10) для 2-х коэффициентов разложения в ячейке $k + 1$ и $2G$ уравнениям (11),(12) для 1-х коэффициентов в ячейках $k + 1$ и k . Четные коэффициенты разложения для ячейки k известны из решения предыдущей двухъячеечной задачи $(k - 1, k)$. После вычисления коэффициентов разложения средний по грани ток нейтронов вычисляется по (7) и нодальные коэффициенты связи обновляются с использованием (6).

V Результаты решения тестовых задач

Нодальный метод решения уравнений диффузии нейтронов в гексагональной геометрии был реализован в программе SKETCH-N (Zimin et al., 2001). Итерационные методы решения системы алгебраических уравнений аналогичны случаю декартовой геометрии. Разработанный нодальный метод используется для решения двухъячеечных задач при расчете токов нейтронов в радиальном направлении. При расчете аксиальных токов используется полиномиальный метод, основанный на полиномах Лежандра. Для оценки точности разработанного метода была проведена серия расчетов двумерных и трехмерных стационарных тестовых задач. Большая часть задач была взята из (Chao and Shatilla, 1995), двумерная четырехгрупповая задача ВВЭР-1000 сформулирована в Makai (1984).

При решении двумерных тестовых задач были проведены расчеты с использованием как кусочно-постоянной формой аппроксимации поперечной утечки для всех расчетных ячеек, так и для комбинированной – с применением кусочно-линейной аппроксимации для граничных ячеек. В таблице 1 представлены результаты решения двумерных тестовых задач. Приняты следующие обозначения: $\Delta P_{max}(\Delta P_{av})$ – максимальная (средняя) ошибка мощности ТВС; Δk_{eff} – ошибка в эффективном коэффициенте размножения.

Полученные результаты демонстрируют, что в случаях, когда в модели явно присутствует отражатель, даже кусочно-постоянная аппроксимация поперечной утечки позволяет получить приемлемые результаты. Только в случаях расчета ВВЭР-1000 и задачи IAEA, при условии границы с вакуумом ($\alpha = 0.5$), данный вид аппроксимации приводит к значительным ошибкам. В этих случаях применение кусочно-линейной аппроксимации поперечной утечки существенно повышает точность метода.

Были проведены расчеты трехмерных тестовых задач по моделированию ВВЭР-440 (Chao and Shatilla, 1995) и ВВЭР-1000 (Kolev et al., 1999). Размер расчетных ячеек для задачи ВВЭР-440 составляла 25 см, для задачи ВВЭР-1000 – 35.5 см. При расчете граничных ячеек применялась кусочно-линейная аппроксимация поперечной утечки нейтронов. Основные результаты расчетов представлены в таблице 2. В таблице приняты следующие обозначения: ΔP_{max}^{3D} (ΔP_{av}^{3D}) — максимальная (средняя) ошибка в трехмерном распределении энерговыделения; ΔP_{max}^{2D} — максимальная ошибка в мощности ТВС; ΔP_{max}^{1D} — максимальная ошибка к среднему по реактору аксиальном профиле энерговыделения.

Представленные результаты демонстрируют высокую точность разработанного полиномиального нодального метода при расчете поля энерговыделения и эффективного коэффициента размножения. Для всех рассчитанных тестовых задач максимальная ошибка в распределении энерговыделения составила менее 2.5 %, а ошибка при расчете коэффициента размножения не превысила 0.026 %.

Таблица 1 Результаты решения двумерных тестовых задач

Задача	$\Delta P_{max}, (\%)$	$\Delta P_{av}, (\%)$	$\Delta k_{eff}, (pcm)$
ВВЭР 440 ^a	0.5 (0.8) ^b	0.2 (0.4)	24 (35)
ВВЭР 1000 ^a ($\alpha = 0.125$)	0.8 (2.8)	0.3 (1.4)	7 (60)
ВВЭР 1000 ^a ($\alpha = 0.5$)	2.1 (5.9)	0.6 (2.3)	0 (62)
ВВЭР 1000 ^c (4 группы)	0.5 (0.4)	0.2 (0.1)	-2 (6)
IAEA ^a без отражателя ($\alpha = 0.125$)	0.6 (1.5)	0.2 (0.7)	4 (71)
IAEA ^a без отражателя ($\alpha = 0.5$)	1.3 (4.8)	0.5 (1.9)	-6 (121)
HWR ^a	0.5 (0.5)	0.1 (0.1)	8 (8)

^a Эталонное решение: расчет по DIF3D-FD (Chao and Shatilla, 1995)

^b Значения в скобках получены при использовании кусочно-постоянной аппроксимации поперечной утечки

^c Эталонное решение: расчет по VENTURE (Noh and Cho, 1996)

Таблица 2 Результаты решения трехмерных задач

Задача	$\Delta P_{max}^{3D}, (\%)$	$\Delta P_{av}^{3D}, (\%)$	$\Delta P_{max}^{2D}, (\%)$	$\Delta P_{max}^{1D}, (\%)$	$\Delta k_{eff}, (pcm)$
ВВЭР-440	1.4	0.4	0.7	0.6	25
ВВЭР-1000	1.9	0.7	0.8	1.2	26

VI Conclusions

В статье представлен полиномиальный нодальный метод решения уравнения диффузии нейтронов в гексагональной геометрии. В методе используется конформное отображение шестигранника на прямоугольник. Уравнение диффузии нейтронов в новой системе координат решается с использованием полиномиальной аппроксимации поперечно-интегрированного потока нейтронов. Для внутренних ячеек расчетной области используется кусочно-постоянная аппроксимация поперечной утечки нейтронов, для граничных ячеек — кусочно-линейная. Использование ортогональных полиномов для аппроксимации потока нейтронов приводит к нодальным уравнениям схожим с уравнениями для декартовой геометрии. Для расчета распределения потока нейтронов во всем объеме используется нелинейная итерационная процедура. Для расчета средних по граням токов нейтронов решаются вспомогательные двухячейчные задачи, в основе которых лежит решение системы из $8G$ алгебраических уравнений. Структура матрицы коэффициентов позволяет, применив несложные алгебраические операции, привести исходную систему к G уравнениям для расчета вторых коэффициентов аппроксимации потока нейтронов в $k + 1$ ячейке и $2G$ уравнениям для расчета первых коэффициентов в k и $k + 1$ ячейках.

Разработанный метод реализован в программе SKETCH-N. В статье приведены основные результаты решения двумерных и трехмерных стационарных тестовых задач. Анализ полученных данных позволяет сделать вывод о высокой точности метода: для всех тестовых задач максимальная ошибка в результатах расчета распределения энерговыделения не превысила 2.5%, а погрешность расчета эффективного коэффициента размножения ниже 0.03%.

Список литературы

Chao, Y. A. and Shatilla, Y. A. (1995). Conformal mapping and hexagonal nodal methods - II: Implementation in the ANC-H code. *Nucl. Sci. Eng.*, 121:210–225.

- Chao, Y. A. and Tsofanidis, N. (1995). Conformal mapping and hexagonal nodal methods - I: Mathematical foundation. *Nucl. Sci. Eng.*, 121:202–209.
- Gadó, J. and Schmidt, F. (1987). Solution of the neutron diffusion equation in hexagonal geometries. *Ann. Nucl. Energy*, 14(2):83–97.
- Knight, M., Hutt, P., and Lewis, I. (1995). Comparison of PANTHER nodal solutions in hexagonal-z geometry. *Nucl. Sci. Eng.*, 121:254–263.
- Kolev, N., Lenain, R., and Fedon-Magnaud, C. (1999). Test AER-FCM-101, AER benchmark specification sheet. Available at AER website http://www.kfki.hu/~aekihp/AER_home/bench_book/bb.html.
- Kulikowska, T. (1981). Global analysis of pressurized water reactors with hexagonal lattice. In *Proc. Int. Top. Mtg. on Advances in Mathematical Methods for the Solution of Nuclear Engineering Problems, München, April 27-29, 1981*, volume 1, pages 367–384. American Nuclear Society.
- Makai, M. (1984). Response matrix of symmetric nodes. *Nucl. Sci. Eng.*, 86:302–314.
- Noh, J. M. and Cho, N. Z. (1996). A multigroup diffusion nodal scheme in rectangular and hexagonal geometries: Hybrid of AFEN and PEN methods. In *Proc. of the Int. Conf. on the Physics of Reactors (PHYSOR 96), Mito, Ibaraki, Japan, September 16-20, 1996*, volume 1, pages A50–A59. Atomic Energy Society of Japan.
- Smith, K. S. (1984). Nodal method storage reduction by nonlinear iteration. *Trans. Am. Nucl. Soc.*, 44:265–266.
- Zimin, V. G., Asaka, H., and Anoda, Y. (2001). SKETCH-N: A nodal neutron diffusion code for solving steady-state and kinetics problems, vol. 1 and 2. Technical report, JAERI. [in print].
- Zimin, V. G., Ninokata, H., and Pogosbekyan, L. R. (1998). Polynomial and semi-analytic nodal methods for nonlinear iteration procedure. In *Proc. of the Int. Conf. on the Physics of Nuclear Science and Technology (PHYSOR98), Long Island, New York, October 5-8, 1998*, volume 2, pages 994–1002. American Nuclear Society.